

Observación de Estados para Sistemas No Lineales con Entradas Desconocidas vía Modos Deslizantes de Alto Orden

Héctor Ríos[†] y Jorge Dávila[‡]

[†] Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería Eléctrica, Facultad de Ingeniería UNAM
Coyoacán D.F. 04510, México

hectorrios@comunidad.unam.mx

[‡] Departamento de Ingeniería Aeronáutica, ESIME-UPT IPN

Gustavo A. Madero D.F. 07340, México

jadavila@unam.mx

Resumen—En este trabajo se presenta el problema de observación con entradas desconocidas para sistemas no lineales. Se propone un esquema de observación en tiempo finito, que no requiere ninguna transformación, basado en el enfoque de modos deslizantes de alto orden no homogéneos, que permiten hacer uso de ganancias variables. Por otro lado, se propone un esquema de reconstrucción exacta de entradas desconocidas, haciendo uso de la inyección de salida equivalente. Ejemplos de simulación ilustran la efectividad de los esquemas propuestos.

Palabras clave: *Sistemas no lineales, observadores no lineales, entradas desconocidas, modos deslizantes.*

I. INTRODUCCIÓN

El problema de observación robusta ha sido estudiado activamente en años recientes usando técnicas de modos deslizantes y teoría de sistemas de estructura variable (ver p.ej. (Utkin *et al.*, 1999), (Edwards y Spurgeon, 1998), (Barbot *et al.*, 2002), (Dávila *et al.*, 2005), (Fridman *et al.*, 2008)). Los observadores por modos deslizantes poseen características muy atractivas, como insensibilidad (más que robustez) con respecto a entradas desconocidas y/o incertidumbres, y la posibilidad de usar la inyección de salida equivalente con propósitos de identificación o reconstrucción. Estas características han sido exhaustivamente estudiadas en (Edwards *et al.*, 2002).

Trabajos recientes en observación de estados para sistemas no lineales (ver p.ej. (Dávila *et al.*, 2005), (Floquet y Barbot, 2006) y (Fridman *et al.*, 2008)) están basados en transformaciones en alguna forma canónica, para después usar técnicas de modos deslizantes de alto orden para la observación de estados. Un observador para la reconstrucción de estados en tiempo finito, que no requiere la transformación del sistema a ninguna forma canónica y que también hace uso de técnicas de modos deslizantes de alto orden, fue presentado en (Dávila *et al.*, 2009).

Por otro lado, un gran paso en el desarrollo de modos deslizantes de alto orden ha sido obtenido por la inclusión de técnicas no homogéneas en el desarrollo de algoritmos. En este sentido, en (Levant y Michael, 2008) fue presentado el algoritmo casi-continuo no homogéneo (uno de los algoritmos de modos deslizantes de alto orden) que permite hacer uso de ganancias variables. Recientemente un esquema adaptable, que permite el diseño de diferenciadores por modos deslizantes de alto orden no homogéneos

con ganancias adaptables, fue presentado en (Angulo y Levant, 2009).

Contribuciones Principales: En este trabajo se propone un esquema de observación en tiempo finito basado en algoritmos por modos deslizantes de alto orden no homogéneos, que permiten hacer uso de ganancias variables. El esquema propuesto permite reconstruir el estado del sistema exactamente y en tiempo finito, sin la necesidad de transformar el sistema en alguna forma canónica. Por otro lado, se propone un esquema de reconstrucción exacta de entradas desconocidas haciendo uso de la inyección de salida equivalente.

La estructura del trabajo es la siguiente. En la Sección II se establece el planteamiento del problema. La Sección III presenta las condiciones de existencia del observador. La dinámica del error de observación de salida es estudiada en la Sección IV, mientras que el diseño de los términos de corrección del observador se presenta en la Sección V. El problema de reconstrucción de entradas desconocidas se establece en la Sección VI. Un ejemplo académico y simulaciones se presentan en la Sección VII. Finalmente, las conclusiones se establecen en la Sección VIII.

II. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Considere el siguiente sistema no lineal incierto:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + D(x)w \\ y &= h(x)\end{aligned}\quad (1)$$

con $x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ el vector de estados, $y \in \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^p$ el vector de salidas y $w \in \mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^p$ el vector de perturbaciones o entradas desconocidas, donde $f(x)$ y las p columnas $D_1(x), \dots, D_p(x)$ de $D(x)$ son campos vectoriales suaves que pueden ser inciertos y $h(x) = [h_1 \ h_2 \ \dots \ h_p]$ es un mapeo suave. El objetivo es diseñar un observador con convergencia en tiempo finito para el sistema (1).

III. EXISTENCIA DEL OBSERVADOR CON ENTRADAS DESCONOCIDAS

Considere la estructura del observador (Dávila *et al.*, 2009), extendida al caso de múltiples salidas

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= f(\hat{x}) + G(\hat{x})\sigma \\ \hat{y} &= h(\hat{x})\end{aligned}\quad (2)$$

con el vector de estados estimados $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, el vector de salidas estimadas $\hat{y} \in \mathbb{R}^p$, la parte nominal del sistema f y h , y $G(\hat{x}) = [g_1 \ g_2 \ \dots \ g_p] \in \mathbb{R}^{n \times p}$ con $g_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, p$, y los términos de corrección $\sigma \in \mathbb{R}^p$. Se asume que todos los términos de corrección garantizan la existencia y unicidad de las soluciones para todo $t \geq 0$.

Seleccione un conjunto de salidas tal que la siguiente matriz (el Jacobiano del mapa de observabilidad)

$$M(\hat{x}) = \begin{bmatrix} dh_i(\hat{x}) \\ \vdots \\ dL_{f(\hat{x})}^{r_i-1} h_i(\hat{x}) \end{bmatrix}; \quad i = 1, \dots, p \quad (3)$$

con $dh(\hat{x}) = \frac{\partial h(\hat{x})}{\partial \hat{x}} = [\frac{\partial h}{\partial \hat{x}_1} \ \dots \ \frac{\partial h}{\partial \hat{x}_n}]$ y $L_{f(\hat{x})}^k h(\hat{x}) = \frac{\partial L_{f(\hat{x})}^{k-1} h(\hat{x})}{\partial \hat{x}} f(\hat{x})$, satisfaga $r_1 + r_2 + \dots + r_p = n$, para el sistema nominal.

Ahora, se establece la siguiente suposición.

SUPOSICIÓN 1: La matriz $M(\hat{x})$ en (3) es no-singular $\forall \hat{x} \in \mathcal{X}$.

La Suposición 1 es una suposición estructural del sistema en su parte nominal. De este modo, $G(\hat{x})$ está dada como la solución de la siguiente ecuación

$$M(\hat{x})G(\hat{x}) = \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{r_1 \times p} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{r_p \times p} \end{bmatrix}}_N \quad (4)$$

de donde se obtiene que

$$G(\hat{x}) = M^{-1}(\hat{x})N \quad (5)$$

Defina el error de observación de la salida y del estado de la siguiente forma

$$e_y = [h_i(\hat{x}) - h_i(x)], \quad e_x = [\hat{x} - x]$$

Defina el vector de error de salida ε , que contiene los errores de salida e_y y sus derivadas correspondientes:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{i,1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{i,r_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{y_i} \\ \vdots \\ e_{y_i}^{(r_i-1)} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Considere el sistema (1) y la siguiente suposición:

SUPOSICIÓN 2: Las funciones f , h y D_i son tales que

$$\begin{bmatrix} L_{D_i(x)} h_i(x) \\ \vdots \\ L_{D_i(x)} L_{f(x)}^{r_i-2} h_i(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$L_{D_i(x)} L_{f(x)}^{r_i-1} h_i(x) \neq 0, \quad i = 1, \dots, p \quad (8)$$

Con base en el Lema propuesto en (Davila *et al.*, 2009) para el caso de una salida, se establece el siguiente Lema para el caso de múltiples salidas.

LEMA 1: Considere el sistema (1) y que las Suposiciones 3.1 y 3.2 se satisfacen. Considere el observador (2), (5). Entonces la siguiente equivalencia se satisface

$$\varepsilon = 0 \Leftrightarrow e_x = 0 \quad (9)$$

Para los detalles de la prueba ver (Davila *et al.*, 2009). Entonces, bajo las Suposiciones 1 y 2, existe una relación de equivalencia entre el error de observación de la salida ε y el error de observación del estado e_x .

IV. DINÁMICA DEL ERROR DE OBSERVACIÓN DE SALIDA

El Lema 1 puede ser explotado fuertemente para propósitos de observación si se es capaz de encontrar los términos de corrección del observador σ con los cuales se pueda llevar al vector ε a cero en tiempo finito. La dinámica del error de observación de la salida toma la siguiente forma canónica de Brunovsky en bloques:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{i,1} &= \varepsilon_{i,2} \\ \dot{\varepsilon}_{i,2} &= \varepsilon_{i,3} \\ &\vdots \\ \dot{\varepsilon}_{i,r_i} &= \tilde{\phi}_{i,r_i+1}(e_x, \hat{x}) + \sigma_i \end{aligned} \quad (10)$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{i,r_i+1}(e_x, \hat{x}) &= L_{f(\hat{x})}^{r_i} h_i(\hat{x}) - L_{f(\hat{x}-e_x)}^{r_i} h_i(\hat{x} - e_x) \\ &\quad - L_{D_i(\hat{x}-e_x)} L_{f(\hat{x}-e_x)}^{r_i-1} h_i(\hat{x} - e_x) w, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned}$$

Ahora se hace la siguiente suposición de acotamiento.

SUPOSICIÓN 3: Hay constantes $\Gamma_{1,i} \geq 0$, $\Gamma_{2,i} \geq 0$ y funciones continuas $\varrho_i(y, \hat{y}) \geq 0$ conocidas, tales que las funciones $\tilde{\Phi}_{i,r_i+1}$, $i = 1, \dots, p$ satisfacen

$$\begin{aligned} \left| \tilde{\Phi}_{i,r_i+1}(e_x, \hat{x}) \right| &< \Gamma_{1,i} \varrho_i(y, \hat{y}) + \Gamma_{2,i} \\ \text{con } |\varrho_i(y, \hat{y})| &\leq \varrho_i^+ \end{aligned} \quad (11)$$

En este trabajo los términos de corrección serán diseñados usando el algoritmo casi-continuo no homogéneo, pero cabe mencionar que es posible seleccionar los términos de corrección de cualquier otra forma, tal que la dinámica del error de observación de salida converja a cero.

V. DISEÑO DE LOS TÉRMINOS DE CORRECCIÓN

V-A. Diseño del Algoritmo Casi-Continuo

Los algoritmos “Casi-Continuos No Homogéneos”, que permiten estabilizar sistemas en la forma (10) en tiempo finito, fueron propuestos en (Levant y Michael, 2008). Los términos de corrección casi-continuos no homogéneos de $r_i - \text{ésimo}$, $i = 1, \dots, p$, se definen como:

$$\sigma_i = -\alpha_i \Xi_i(y, \hat{y}) \Psi_{i,r_i-1,r_i}(e_{y_i}, \dots, e_{y_i}^{(r_i-1)}) \quad (12)$$

donde $\Xi_i(\cdot)$ tiene la siguiente forma

$$\Xi_i(y, \hat{y}) = \lambda_{1,i} \varrho_i(y, \hat{y}) + \lambda_{2,i} \quad (13)$$

con $\alpha_i > 0$, $\lambda_{1,i} > 0$, $\lambda_{2,i} > 0$, Ψ_{i,r_i-1,r_i} el algoritmo recursivo de modos deslizantes de $r_i - \acute{e}simo$ orden, y Ξ_i la función de ganancia.

Los términos de corrección definidos por (12) y (13) están globalmente acotados ($|\sigma_i| \leq \alpha_i \Xi_i$, $i = 1, \dots, p$) y son continuos casi en todos lados excepto en el origen de cada espacio del error r_i -dimensional. Dichos algoritmos requieren la disponibilidad de las derivadas sucesivas del error de salida hasta un orden $r_i - 1$, $i = 1, \dots, p$. Para esto se usa el diferenciador no homogéneo (Levant, 2006).

V-A.1. Diferenciador No Homogéneo: Los diferenciadores de orden $r_i - 1$ pueden ser expresados de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{z}_{i,0} &= v_{i,0}, \\ v_{i,0} &= z_{i,1} - k_{i,0} L_i^{\frac{1}{r_i}} |z_{i,0} - e_{y_i}|^{\frac{(r_i-1)}{r_i}} \text{sign}(z_{i,0} - e_{y_i}) \\ \dot{z}_{i,1} &= v_{i,1}, \\ v_{i,1} &= z_{i,2} \\ &\quad - k_{i,1} L_i^{\frac{1}{(r_i-1)}} |z_{i,1} - v_{i,0}|^{\frac{(r_i-2)}{(r_i-1)}} \text{sign}(z_{i,1} - v_{i,0}) \\ &\dots \\ \dot{z}_{i,r_i-1} &= -k_{i,r_i-1} L_i \text{sign}(z_{i,r_i-1} - v_{i,r_i-2}) \end{aligned} \quad (14)$$

donde $z_{i,j}$ es la estimación de $e_{y_i}^{(j)}(t)$. El diferenciador proporciona estimación exacta y en tiempo finito, bajo condiciones ideales, si L_i es una cota superior para cada $|e_{y_i}^{(r_i)}|$. Entonces para constantes positivas $k_{i,j}$, $i = 1, \dots, p$, $j = 0, \dots, r_i - 1$, seleccionadas de acuerdo a (Levant, 2003), la convergencia de cada diferenciador de orden $r_i - 1$ es garantizada.

Los diferenciadores (14) estiman las derivadas exactamente solo después de un transitorio de tiempo finito. Por lo tanto, cuando la estimación exacta de las derivas es garantizada, este es el momento para activar los términos de corrección. El siguiente Teorema (Angulo y Levant, 2009) ayuda a determinar el tiempo de convergencia de cada diferenciador.

TEOREMA 1: Considere el diferenciador (14), donde $e_{y_i}(t)$ son las funciones a diferenciar y asuma que los parámetros del diferenciador $k_{i,j}$, $i = 1, \dots, p$, $j = 0, \dots, r_i - 1$ proporcionan la convergencia en tiempo finito de cada diferenciador para cualquier orden en ausencia de ruido. Sea $\eta_i(t)$ ruido medible en el sentido de Lebesgue, suponiendo que:

$$e_{y_i}(t) = e_{y_{i,0}}(t) + \eta_i(t), \quad \begin{cases} |e_{y_{i,0}}^{(r_i)}(t)| < L_i, \\ |\eta_i(t)| \leq \kappa_{\eta,i} L_i \xi_i^{r_i} \end{cases} \quad (15)$$

donde $e_{y_{i,0}}(t)$ son señales desconocidas. Además, suponga que e_{y_i} son muestreadas con un paso de muestreo $\delta > 0$ y $\delta < \kappa_{\delta,i} \xi_i$, con ξ_i , $\kappa_{\eta,i}$, $\kappa_{\delta,i}$ constantes positivas. Entonces, existen constantes positivas $\gamma_{0,i}$, $\gamma_{1,i}$, \dots , $\gamma_{r_i-1,i}$ y $\gamma_{t,i} > 0$ con $0 < \kappa_{e_{y_i,i}} < \gamma_{0,i}$, tales que si las desigualdades

$$|z_{i,0} - e_{y_i}(t)| \leq \gamma_{0,i} L_i \xi_i^{r_i} \quad (16)$$

se satisfacen durante cada intervalo de tiempo de longitud $\gamma_{t,i} \xi_i$, entonces desde el inicio de este intervalo las desigualdades

$$|z_{i,j} - e_{y_i}^{(j)}(t)| \leq \gamma_{j,i} L_i \xi_i^{r_i-j} \quad (17)$$

con $i = 1, \dots, p$ y $j = 0, \dots, r_i - 1$; se satisfacen para todo tiempo futuro, para cada uno de los diferenciadores.

V-A.2. Adaptación de Ganancia: Para estimar las derivadas es necesario conocer las ganancias L_i para cada uno de los diferenciadores. De la ecuación (17) uno puede concluir que para L_i pequeñas la exactitud del diferenciador será mejor, mientras que para condiciones iniciales grandes, se requieren ganancias grandes, pero una vez que las trayectorias del sistema del error de salida están cerca del origen, las ganancias de cada diferenciador pueden ser más pequeñas. En este sentido, resulta útil considerar ganancias que se adapten en función del error de observación de salida. En (Levant, 2006) se mostró que es posible seleccionar la ganancia como una función del tiempo, pero para garantizar la robustez se requiere que la derivada logarítmica $|\dot{L}_i(t)/L_i(t)|$ este uniformemente acotada. Con base en (Angulo y Levant, 2009), donde se propone un algoritmo de adaptación de ganancia, se establece la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 1: Considere el sistema (10) y asuma que:

- $\|\varepsilon_i(0)\| \leq \varepsilon_{0i}^+$ con ε_{0i}^+ , $i = 1, \dots, p$ constantes conocidas.
- $\|\sigma_i\| \leq \rho_{1i} \|\varepsilon_i\| + \rho_{2i}$, $i = 1, \dots, p$ para constantes conocidas ρ_{1i} y ρ_{2i}^1 .

Ahora se considera el siguiente algoritmo de adaptación para las ganancias $L_i(t)$ de cada diferenciador

- Sea $L_i(t) = L_{0i}$ para $0 \leq t \leq t_{1i}$, con t_{1i} los instantes de tiempo para los cuales la convergencia de cada diferenciador ha sido detectada y con L_{0i} una constante suficientemente grande.
- Sea $L_i(t) = \lambda_{1i} (\|\hat{\varepsilon}_i\| + \lambda_{2i})$ para $t > t_{1i}$, donde

$$\lambda_{1i} > \rho_{1i}; \quad \lambda_{2i} > \frac{\Gamma_{1,i} \varrho_i^+ + \Gamma_{2,i} + \rho_{2i}}{\lambda_{1i}} \quad (18)$$

con $i = 1, \dots, p$ y $\hat{\varepsilon}_i(t)$ construidas usando las estimaciones de los mismos diferenciadores. Entonces, la estimación de las derivadas de $e_{y_i}(t)$ es asegurada y además, la derivada logarítmica $|\dot{L}_i(t)/L_i(t)|$ esta uniformemente acotada para cada diferenciador.

El Teorema 1 proporciona una manera simple de determinar si cada uno de los diferenciadores ha convergido verificando que $|z_{i,0} - e_{y_i}(t)| \leq \gamma_{0,i} L_i \delta^{r_i}$ se satisfaga en un intervalo de tiempo $\gamma_{t,i} \delta$. Las constantes $\gamma_{0,i}$ y $\gamma_{t,i}$ se estiman fácilmente por simulación.

¹ $\|\cdot\|$ representa la norma euclidiana.

De esta forma, se propone que los términos de corrección sean construidos de la siguiente forma:

$$\sigma_i(t) = \begin{cases} \bar{\sigma}_i & \text{si } |z_{i,0} - e_{y_i}(t)| \leq \gamma_{0,i} L_i \delta^{r_i} \\ & \text{en el intervalo } \gamma_{t,i} \delta_i, \quad i = 1, \dots, p \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \quad (19)$$

donde $\bar{\sigma}_i$ son los términos de corrección calculados de acuerdo a (12) y (12) usando las derivadas estimadas por los diferenciadores (14) con adaptación de ganancia L_i .

Tomando en cuenta el Lema 1 y el diseño de los términos de corrección, se establece el siguiente Teorema que resuelve el problema de observación de estados.

TEOREMA 2: *Considere el sistema (1) y que las Suposiciones 1, 2 y 3 se satisfacen. El observador (2), (5) con σ_i , $i = 1, \dots, p$, diseñadas de acuerdo a (19), con α_i , $i = 1, \dots, p$, suficientemente grandes y $\lambda_{1,i} > \Gamma_{1,i}$, $\lambda_{1,i} > \Gamma_{2,i}$, $i = 1, \dots, p$, garantiza que el error de observación del estado $e_x = \hat{x} - x$ converja a cero en tiempo finito.*

Debido a las propiedades de la convergencia del algoritmo casi-continuo no homogéneo (Levant y Michael, 2008), la prueba del Teorema 2 es una consecuencia trivial del Lema 1.

VI. RECONSTRUCCIÓN EXACTA DE ENTRADAS DESCONOCIDAS

En estado estable, todos los términos del vector de error de salida ε y del error de observación del estado e_x son idénticamente igual a cero, mientras que los términos \dot{e}_{i,r_i} , $i = 1, \dots, p$ y \dot{e}_x , están afectados directamente por los términos de corrección discontinuos. Por lo tanto, estamos en posición de explotar el “Principio de Inyección de Salida Equivalente” (ver p. ej. (Edwards y Spurgeon, 1998) y (Utkin *et al.*, 1999)).

La expresión de \dot{e}_x es

$$\dot{e}_x = f(\hat{x}) + G(\hat{x})\sigma - f(x) - Dw(x, t) \quad (20)$$

Cuando la estimación del estado es garantizada, (20) se convierte en

$$\dot{e}_x = G(\hat{x})\sigma - Dw(x, t) \quad (21)$$

De esta forma, los términos de corrección σ toman el valor de la inyección de salida equivalente σ_{eq} , es decir

$$G(\hat{x})\sigma_{eq} = Dw(x, t) \quad (22)$$

lo cual deriva de hacer $\dot{e}_x = 0$ (método de control equivalente (Utkin *et al.*, 1999)). Si los términos de corrección $\sigma_{i_{eq}}$, $i = 1, \dots, p$, estuvieran disponibles, entonces la siguiente relación permitiría reconstruir las entradas desconocidas y/o incertidumbres $w(x, t)$:

$$w_i(x, t) = D^+ G(\hat{x}) \sigma_{i_{eq}}, \quad i = 1, \dots, p \quad (23)$$

donde $D^+ = (D^T D)^{-1} D^T$, es la matriz pseudoinversa de D (Poznyak, 2008).

Considere las entradas desconocidas $w_i(x, t)$, $i = 1, \dots, p$ señales Lipschitz en x , continuas en t . Bajo esta condición, las entradas desconocidas pueden ser reconstruidas

exactamente y en tiempo finito por medio del siguiente procedimiento.

En lugar de usar el algoritmo definido por (12), se implementa el siguiente algoritmo casi-continuo no homogéneo “*augmentado*”, de orden $(r_i + 1)$, $i = 1, \dots, p$

$$\dot{\sigma}_i = -\alpha_i \Xi_i(\cdot) \Psi_{i,r_i,r_{i+1}}(e_{y_i}, \dots, e_{y_i}^{(r_i)}) \quad (24)$$

Se demostró en (Levant y Michael, 2008) que el algoritmo casi-continuo no homogéneo “*augmentado*” con “*parámetros robustos con función de ganancia*”, con Ξ_i elegida adecuadamente y con $\alpha_i > 0$; estabiliza el sistema (10) en tiempo finito. La diferencia ahora, es que los términos de corrección σ_i , son continuos en todos lados, incluyendo el origen de los espacios del error. Esto significa que la equivalencia $\sigma_i = \sigma_{i_{eq}}$, se satisface, no en “*promedio*”, es decir, hay un tiempo finito t^* tal que

$$\sigma_i = \sigma_{eq_i}, \quad t \geq t^*, \quad i = 1, \dots, p. \quad (25)$$

De este modo, las entradas desconocidas pueden ser reconstruidas exactamente y en tiempo finito, usando la expresión (23) con los términos σ_i , $i = 1, \dots, p$ calculados mediante (24) en lugar de $\sigma_{i_{eq}}$, $i = 1, \dots, p$.

VII. EJEMPLO Y SIMULACIONES

Considere el siguiente sistema no lineal de 5to orden

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2x_1 - x_2 + x_5 \\ x_1 \\ -x_3^3 - 2x_3 - x_4 \\ x_3 \\ (x_2 - 4) \frac{2x_5 + \sin(x_5)}{2 + \cos(x_5)} \end{bmatrix} + D(x) \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad (26)$$

con la salida medible $y = [x_2 \quad x_4]^T$ y condiciones iniciales $x(0) = [1 \quad 0,1 \quad 1 \quad -0,6 \quad 0,4]^T$. La matriz $M(\hat{x})$ en (3) toma la forma

$$M(\hat{x}) = \begin{bmatrix} dh_1(\hat{x}) \\ dL_{f(\hat{x})} h_1(\hat{x}) \\ dL_{f(\hat{x})}^2 h_1(\hat{x}) \\ dh_2(\hat{x}) \\ dL_{f(\hat{x})} h_2(\hat{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ya que $\det M = 1$, la Suposición 1 se satisface localmente. La matriz $G(\hat{x})$, de acuerdo a (5), tiene la siguiente forma

$$G(\hat{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (27)$$

VII-A. Observación en Presencia de Incertidumbres y Entradas Desconocidas

Las condiciones para la observación de estado robusta bajo incertidumbres en el modelo y/o entradas desconocidas son desarrolladas aplicando el Lema 1. A continuación, se establecerá que tipo de incertidumbres y/o entradas desconocidas puede soportar el esquema propuesto sin perder la observación exacta y convergencia en tiempo finito. Para

el sistema (26), la Suposición 2 implica las siguientes condiciones

$$L_{D_1(x)}h_1(x) = 0 \quad (28)$$

$$L_{D_1(x)}L_f(x)h_1(x) = 0 \quad (29)$$

$$L_{D_1(x)}h_2(x) = 0 \quad (30)$$

La matriz de distribución $D(x)$ que satisface la Suposición 2, toma la forma:

$$D(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & d_1(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_2(x) \end{bmatrix}^T \quad (31)$$

De las ecuaciones (28)-(30) y de la forma de la matriz $D(x)$, la Suposición 2 se reduce a considerar que la 1^{era}, 2^{da} y 4^{ta} ecuación del observador, deben tener la misma forma que las del modelo nominal, es decir, no se permiten incertidumbres en el modelo ni entradas desconocidas en la 1^{era}, 2^{da} y 4^{ta} fila. Mientras que para la 3^{era} y 5^{ta} ecuación del observador se pueden soportar tanto incertidumbres en el modelo como entradas desconocidas.

De esta manera se considera $d_1(x) = x_1x_2^2$, $d_2(x) = x_3x_1$ para la matriz $D(x)$, y las entradas desconocidas:

$$w_1 = \text{sen}(3,18t) + 2\text{sen}(7,32t) + 0,5\text{sen}(0,79t) \quad (32)$$

$$w_2 = 3\text{sen}(0,5t) + 0,5\text{cos}(t) \quad (33)$$

Por otro lado, se considera, como parte de las incertidumbres y el peor de los casos, que se desconoce la dinámica de la 3^{era} y 5^{ta} ecuación del modelo. De este modo, se implementa el siguiente observador:

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -2\hat{x}_1 - \hat{x}_2 + \hat{x}_5 \\ \hat{x}_1 \\ 0 \\ \hat{x}_3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} \quad (34)$$

con $\hat{y} = [\hat{x}_2 \ \hat{x}_4]^T$. Es evidente que las entradas desconocidas no son modeladas pero se sabe que entran por la 3^{era} y 5^{ta} fila. Las condiciones iniciales del observador son iguales a cero, mientras que los términos de corrección σ_1 y σ_2 son diseñados como un algoritmo casi-continuo no homogéneo de 3er orden y de 2do orden, respectivamente:

$$\sigma_1 = -30\Xi_1(\cdot) \frac{\ddot{e}_{y_1} + 3\left(|\dot{e}_{y_1}| + |e_{y_1}| \frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\dot{e}_{y_1} + |e_{y_1}| \frac{2}{3} \text{sign}(e_{y_1})\right)}{|\dot{e}_{y_1}| + 3\left(|\dot{e}_{y_1}| + |e_{y_1}| \frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (35)$$

$$\sigma_2 = -8\Xi_2(\cdot) \frac{\dot{e}_{y_2} + 4|e_{y_2}| \frac{1}{2} \text{sign}(e_{y_2})}{|\dot{e}_{y_2}| + 4|e_{y_2}|^{\frac{1}{2}}}$$

con $e_{y_1} = \hat{x}_2 - y_1$ y $e_{y_2} = \hat{x}_4 - y_2$, y con las derivadas de los errores de salida estimadas por el diferenciador (14), con $r_1 = 3$, $k_{1,0} = 2$, $k_{1,1} = 1,5$, $k_{1,2} = 1,1$, $L_{01} = 770$ y $L_1(t) = 10(\|\hat{e}_1\| + 15)$; y $r_2 = 2$, $k_{2,0} = 1,5$, $k_{2,1} = 1,1$, $L_{02} = 470$ y $L_2(t) = 10(\|\hat{e}_2\| + 5)$ respectivamente; y $\Xi_1 = 7|\hat{y}_1 - y_1| + 1,5$ y $\Xi_2 = 3|\hat{y}_2 - y_2| + 1$.

La reconstrucción de los estados en presencia de incertidumbres en el modelo y entradas desconocidas se muestra

en la Figura 1 donde se puede apreciar que los estados estimados convergen a los estados reales en tiempo finito a pesar de la presencia de incertidumbres en el modelo y de entradas desconocidas.

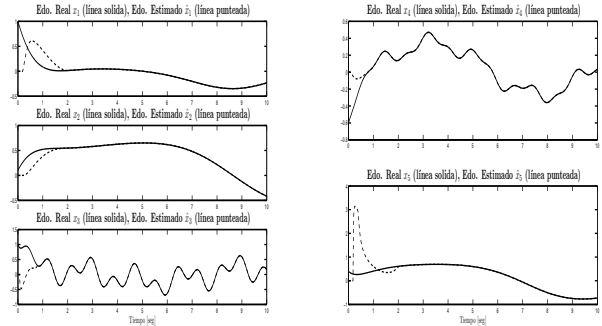


Figura 1. Reconstrucción de Estado

Los términos de corrección se muestran en la Figura 2. En estas gráficas se ve que los términos de corrección son iguales a cero antes de que los diferenciadores convergen, para después tomar el valor del algoritmo casi-continuo no homogéneo, como se estableció en (19).

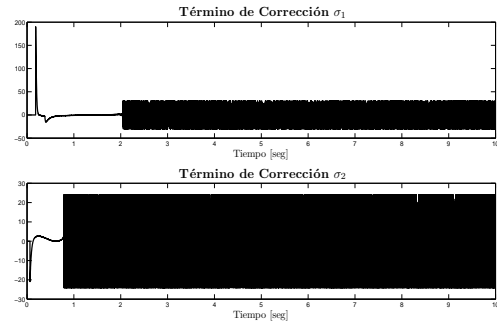


Figura 2. Términos de Corrección

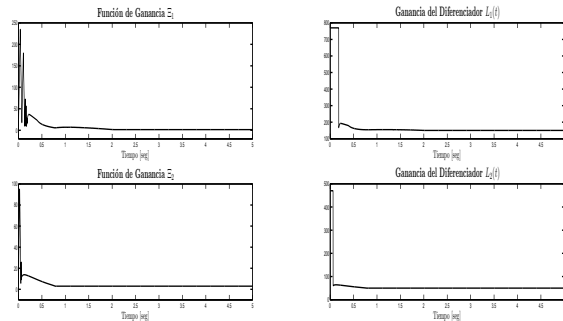


Figura 3. Funciones de Ganancia y Ganancias de los Diferenciadores

El comportamiento de las Funciones de Ganancia de los términos de corrección se aprecia por el lado izquierdo de la Figura 3. Se ve que al inicio, la función de ganancia toma valores grandes, pero una vez que el error de observación

converge a cero esta disminuye, adaptándose en función del error de observación de salida y sus derivadas. Algo muy similar ocurre con las Ganancias de los Diferenciadores que se muestran del lado derecho de la Figura 3.

VII-B. Reconstrucción de Entradas Desconocidas

Considere que la matriz $D(x)$ tiene la estructura (31), ahora con los términos $d_1(x) = d_2(x) = 1$. Considere las entradas desconocidas descritas por (32)-(33). De este modo, el observador tiene la siguiente estructura

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -2\hat{x}_1 - \hat{x}_2 + \hat{x}_5 \\ \hat{x}_1 \\ -\hat{x}_3^3 - 2\hat{x}_3 - \hat{x}_4 \\ \hat{x}_3 \\ (\hat{x}_2 - 4) \frac{2\hat{x}_5 + \text{sen}\hat{x}_5}{2 + \text{cos}\hat{x}_5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} \quad (36)$$

con $\hat{y} = [\hat{x}_2 \quad \hat{x}_4]^T$. Los términos de corrección σ_i , usados para la reconstrucción, se calculan de la siguiente manera:

$$\dot{\sigma}_1 = -70\Xi_1(e, \hat{x})\Psi_{3,4} \quad (37)$$

$$\dot{\sigma}_2 = -30\Xi_2(e, \hat{x})\Psi_{2,3} \quad (38)$$

donde

$$\Psi_{3,4} = e_{y_1}^{(3)} + 3,5 \left[\ddot{e}_{y_1} + 1,5 \left(|e_{y_1}| + 0,5 |e_{y_1}|^{3/4} \right)^{-1/3} \times \left(\dot{e}_{y_1} + 0,5 |e_{y_1}|^{3/4} \text{sign}(e_{y_1}) \right) \right] \div \left[e_{y_1}^{(3)} + 3,5 \left[|e_{y_1}| + 1,5 \left(|e_{y_1}| + 0,5 |e_{y_1}|^{3/4} \right)^{2/3} \right]^{1/2} \right]$$

$$\Psi_{2,3} = \ddot{e}_{y_2} + \left[5,5 \left(|e_{y_2}| + 1 |e_{y_2}|^{2/3} \right)^{-1/2} \times \left(\dot{e}_{y_2} + 1 |e_{y_2}|^{2/3} \text{sign}(e_{y_2}) \right) \right] \div \left[\ddot{e}_{y_2} + 5,5 \left(|e_{y_2}| + 1 |e_{y_2}|^{2/3} \right)^{1/2} \right]$$

con $e_{y_1} = \hat{x}_2 - y_1$ y $e_{y_2} = \hat{x}_4 - y_2$, y con las derivadas de los errores de salida estimadas por el diferenciador (14), con $r_1 = 4$, $k_{1,0} = 3$, $k_{1,1} = 2$, $k_{1,2} = 1,5$, $k_{1,3} = 1,1$, $L_{01} = 1070$ y $L_1(t) = 10 (\|\varepsilon_1\| + 15)$; y $r_2 = 3$, $k_{2,0} = 2$, $k_{2,1} = 1,5$, $k_{2,2} = 1,1$, $L_{02} = 1070$ y $L_2(t) = 10 (\|\varepsilon_2\| + 5)$ respectivamente; y $\Xi_1 = 7|\hat{y}_1 - y_1| + 1,5$ y $\Xi_2 = 3|\hat{y}_2 - y_2| + 1$.

La reconstrucción de entradas desconocidas es realizada por medio de la relación (23). Los resultados de la reconstrucción exacta se muestran en la Figura 4.

VIII. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha propuesto un esquema adaptable, basado en modos deslizantes de alto orden no homogéneos, para la observación de estado en tiempo finito para cierta clase de sistemas no lineales inciertos. Restricciones geométricas en las entradas desconocidas garantizan la convergencia exacta y en tiempo finito. Por otro lado, se ha propuesto un esquema para la reconstrucción de entradas desconocidas de manera exacta. Los esquemas propuestos no requieren ningún tipo de transformación y los resultados de simulación muestran la efectividad de dichos esquemas.

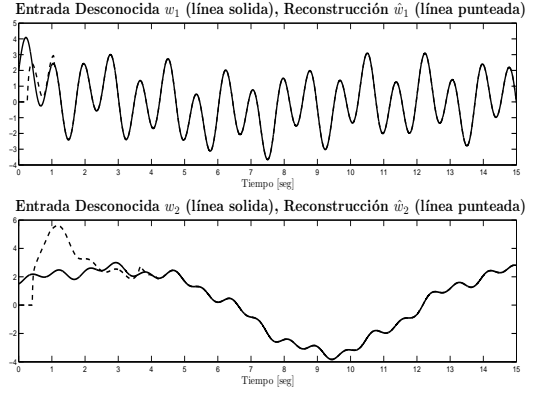


Figura 4. Reconstrucción de Entradas Desconocidas

IX. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo proporcionado por el CONACyT apoyo 56819, al PAPIIT-UNAM apoyo 111208 y FONCICYT proyecto 93302.

REFERENCIAS

- Angulo, M.T. y A. Levant (2009). On robust output based finite-time control of Iti systems using hosms. En: *Proceedings of the 3rd IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems*. Zaragoza, Spain.
- Barbot, J.P., M. Djemai y T. Boukhobza (2002). Sliding mode observers. En: *Sliding Mode Control in Engineering* (W. Perruquetti y J.P. Barbot, Eds.). pp. 103–130. Control Engineering. Marcel Dekker. New York.
- Davila, J., L. Fridman, A. Pisano y A. Usai (2009). Finite-time state observation for nonlinear uncertain systems via higher order sliding modes. *International Journal of Control* **82**(8), 1564–1574.
- Davila, J., L. Fridman y A. Levant (2005). Second-order sliding-mode observer for mechanical systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.* **50**(11), 1785–1789.
- Edwards, C., S.K. Spurgeon y Chee Pin Tan (2002). On development and applications of sliding mode observers. En: *Variable Structure Systems: Towards 21st Century* (X. Yu y J. Xu, Eds.). pp. 253–282. Lecture Notes in Control and Information Science. Springer Verlag. Berlin, Germany.
- Edwards, C. y S.K. Spurgeon (1998). *Sliding Mode Control: Theory and applications*. Taylor and Francis. London.
- Floquet, T. y J. Barbot (2006). A canonical form for the design of unknown input sliding mode observers. En: *Advances in variable structure and sliding mode control* (C. Edwards, E. Fossas y L. Fridman, Eds.). pp. 271–292. Lecture Notes in Control and Information Science. Springer Verlag. Berlin.
- Fridman, L., Y. Shtessel, C. Edwards y X. Yan (2008). Higher-order sliding-mode observer for state estimation and input reconstruction in nonlinear systems. *Int. J. Robust Nonlinear Control* **18**(4-5), 399–413.
- Levant, A. (2003). High-order sliding modes: differentiation and output-feedback control. *International Journal of Control* **76**(9-10), 924–941.
- Levant, A. (2006). Exact differentiation of signals with unbounded higher derivatives. En: *Proc. 45th IEEE Conf. Decision Control*. San Diego, CA, USA. pp. 5585 – 5590.
- Levant, A. y A. Michael (2008). Adjustment of high-order sliding-mode controllers. *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **19**, 1657–1672.
- Poznyak, A. (2008). *Advanced Mathematical Tools for Control Engineers: Volume 1: Deterministic Techniques*. Elsevier Science. Amsterdam-Boston.
- Utkin, V., J. Guldner y J. Shi (1999). *Sliding Modes in Electromechanical Systems*. Taylor and Francis. London.